

PODSTAWY MECHANIKI
KONSTRUKCJI
Z PAMIĘCIĄ KSZTAŁTU

MODELOWANIE I NUMERYKA

Mieczysław Kuczma

Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego
Zielona Góra 2010

RADA WYDAWNICZA

Krzysztof Urbanowski (*przewodniczący*),
Marian Adamski, Rafał Ciesielski, Michał Drab, Maria Fic,
Bohdan Halczak, Andrzej Maciejewski, Janusz Matkowski,
Anna Walicka, Zdzisław Wołk, Ryszard Błażyński (*sekretarz*)



RECENZJE

prof. dr hab. inż. Bogdan Raniecki
prof. dr hab. inż. Romuald Świtka

SKŁAD I ŁAMANIE

Mieczysław Kuczma

PROJEKT OKŁADKI

Kazimierz Wysocki

© Copyright by Mieczysław Kuczma, Zielona Góra 2010

ISBN 978-83-7481-411-9

**OFICyna WYDAWNICZA
UNIWERSYTETU ZIELONOGÓRSKIEGO**

65-246 Zielona Góra; ul. Podgórna 50, tel./faks (068) 328 78 64
www.ow.uz.zgora.pl; e-mail: oficynawydawnicza@adm.uz.zgora.pl

Mojej ukochanej rodzinie:
żonie Bożenie,
córkom Kasi i Gabrysi,
oraz synowi Pawłowi,
książkę tę dedykuję.

Przedmowa

Postęp technologiczny i komputeryzacja działalności produkcyjnej człowieka stwarzają duże możliwości analizy, projektowania i precyzyjnego wytwarzania nowych materiałów oraz innowacyjnych rozwiązań w praktyce. Dotyczy to także tak tradycyjnej dziedziny inżynierii jaką jest budownictwo, gdzie nowoczesne materiały o wysokiej wytrzymałości pozwalają inżynierom i architektom realizować ich śmiałe koncepcje i wizje, np. w budowie mostów, drapaczy chmur, i nowe sposoby gospodarowania energią. Nieodzowne są tu również współczesne programy komputerowe do analizy statyczno-wytrzymałościowej konstrukcji i pomiarów bieżącego stanu, oraz dostrajania parametrów konstrukcji do aktualnych warunków jej pracy w przypadkach ekstremalnych (przeciążenie, trzęsienie ziemi). Obecnie inżynierowie poszukują rozwiązań systemowych opartych na materiałach wielofunkcyjnych, które oprócz funkcji nośnej byłyby również w stanie pełnić rolę czujników lub siłowników (sensorów, aktuatorów) reagujących adaptacyjnie na zmieniające się czynniki otoczenia.

Opracowanie dotyczy modelowania teoretycznego i symulacji komputerowych pewnej klasy nowoczesnych materiałów – *materiałów z pamięcią kształtu* – oraz konstrukcji z nich wykonanych. Materiały te, np. stopy niklu i tytanu o handlowej nazwie *nitinol*, popularnie nazywane *materiałami inteligentnymi* (ang. smart materials), są obiecującym kandydatem na materiał wielofunkcyjny, bo wykazują unikatowe zachowanie w postaci pseudosprężystych pętli histerezy i efektu pamięci kształtu. Ich zachowanie się jest skutkiem martenzytycznej przemiany fazowej, której mogą ulegać pod wpływem naprężenia, temperatury lub pola elektromagnetycznego. Materiały te mogą się znacznie odkształcać odwracalnie (nawet 8-10%), tzn. po usunięciu obciążenia albo bezpośrednio wracają do stanu wyjściowego lub odkształcenia znikają po ogrzaniu. Dzięki tym właściwościom materiały z pamięcią kształtu znajdują różnorakie zastosowania jako zaawansowane rozwiązania w technice i medycynie, a ostatnio prowadzi się także badania naukowe celem zastosowania ich w budownictwie jako dyssypatorów energii w obiektach narażonych na trzęsienie ziemi i regulatorów sztywności konstrukcji.

Moje zainteresowanie materiałami z pamięcią kształtu jest zasługą Profesorów Erwina Steina, Aleksandra Mielkego i Valeryego Levitasa, z którymi miałem przyjemność współpracować na Uniwersytecie w Hanowerze w latach 1995-1996 w ramach projektu badawczego finansowanego przez Fundację Volkswagen-Stiftung. Do pracy na Uniwersytecie w Hanowerze zostałem delegowany przez Politechnikę Poznańską, wówczas moją macierzystą Uczelnię. Badania nad materiałami z pamięcią kształtu i konstrukcjami z nich wykonanymi kontynuowałem na Uniwersytecie Zielonogórskim w ramach indywidualnego projektu badawczego finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2003-2006. Wszystkim osobom oraz instytucjom, które umożliwiły mi prowadzenie badań nad tym fascynującym problemem badawczym składam serdeczne podziękowania.

Słowa serdecznych podziękowań składam także Profesorowi Bogdanowi Ranieckiemu i Profesorowi Romualdowi Świtce za zainteresowanie niniejszą pracą, wiele cennych uwag i wnikliwie recenzje.

Mieczysław Kuczma

Spis treści

1	Wprowadzenie	13
I	PODSTAWY TEORII	19
2	Podstawowe pojęcia mechaniki ciał odkształcalnych	21
2.1	Tensory	21
2.2	Równanie pracy wirtualnej	30
2.3	Zasady termodynamiki	33
3	Nierówności wariacyjne i zadania komplementarności	35
3.1	Przestrzenie metryczne i liniowe unormowane	36
3.2	Formy dwuliniowe	53
3.3	Różniczkowanie operatorów	54
3.4	Nierówności wariacyjne	63
3.5	Zadania komplementarności	87
3.6	Aproksymacja skończenie wymiarowa MES	90
3.7	Algorytmy komputerowe	97
II	KONSTRUKCJE SPRĘŻYSTE	105
4	Kratownice sprężyste	109
4.1	Pręt kratownicy płaskiej (2D)	109
4.2	Pręt kratownicy przestrzennej (3D)	112
4.3	Zadanie geometrycznie nieliniowe	114
4.4	Przykłady numeryczne	117
5	Pręty sprężyste	125
5.1	Sformułowanie wariacyjne	126
5.2	Rozwiązanie przybliżone zagadnienia brzegowego	129

5.3	Przykład liczbowy	136
6	Belki sprężyste	141
6.1	Sformułowanie wariacyjne	143
6.2	Rozwiązanie MES	144
6.3	Przykłady liczbowe	147
7	Tarcze sprężyste	157
7.1	Związki konstytutywne płaskiego stanu naprężenia	157
7.2	Sformułowanie MES	161
7.3	Tarczowe elementy skończone	165
8	Płyty sprężyste	173
8.1	Związki konstytutywne płyty izotropowej	174
8.2	Warunki brzegowe płyty	178
8.3	Związki konstytutywne płyty anizotropowej	180
8.4	Równanie wariacyjne płyty anizotropowej	182
8.5	Sformułowanie MES	184
8.6	Płytowe elementy skończone	186
8.7	Przykład numeryczny	195
III	MARTENZYTYCZNE PRZEMIANY FAZOWE	197
9	Problem modelowy jednowymiarowy (1D)	203
9.1	Model mechaniczny	204
9.2	Wyniki analityczne	210
9.3	Wyniki numeryczne	216
9.4	Problem nieizotermiczny	225
9.5	W kwestii opisu wewnętrznych pętli histerezy	230
10	Związki fizyczne dla 1D układu trójfazowego	235
11	Układ 3D dwufazowy	239
11.1	Energia swobodna i zależności termomechaniczne	241
11.2	Sformułowanie w postaci nierówności wariacyjnej	245
11.3	Istnienie i jednoznaczność rozwiązania	250
11.4	Liniowe zadanie komplementarności	252
11.5	Przykłady numeryczne	253

12 Problem 3D wielu studni	263
12.1 Sformułowanie w postaci nierówności wariacyjnej	263
12.2 Istnienie i jednoznaczność rozwiązania	267
12.3 Przykład numeryczny	269
IV KONSTRUKCJE Z PAMIĘCIĄ KSZTAŁTU	273
13 Kratownice z pamięcią kształtu	277
13.1 Pręt kratownicowy z MZPK	277
13.2 Problem przyrostowy	281
13.3 Zadanie geometrycznie nieliniowe	283
13.4 Przykłady numeryczne	284
14 Belki z pamięcią kształtu	295
14.1 Zginanie kompozytowej belki z MZPK	296
14.2 Problem przyrostowy	299
14.3 Przykłady numeryczne	301
15 Płyty z pamięcią kształtu	309
15.1 Związki konstytutywne dla płyty z MZPK	310
15.2 Sformułowanie wariacyjne i zadanie przyrostowe	312
15.3 Przykłady numeryczne	316
A Pomocnicze pojęcia matematyczne	325
B Macierz sztywności elementu trójkątnego LST	331
C Macierz sztywności elementu płytowego plQ4	335
Bibliografia	349
Indeks	367

Podstawowe oznaczenia

1D, 2D, 3D	jedno-, dwu-, trój-wymiarowy
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$	iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{R}^d$, $d = 2, 3$
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	iloczyn tensorowy wektorów
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	iloczyn skalarny tensorów II-go rzędu $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$
\mathbb{C}	tensor IV-rzędu modułów sprężystości, $\mathbf{B} = \mathbb{C}[\mathbf{A}]$
\mathbf{D}	macierz sztywności płyty, lub macierz występująca w LZK
σ, ε, E	naprężenie, odkształcenie, moduł Younga w 1D
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor naprężenia, lub macierz kolumnowa z jego składowych
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor małych odkształceń
\mathbf{d}_i	tensor odkształceń fazowych (domena) i -tej fazy
$\boldsymbol{\epsilon}$	macierz kolumnowa ze składowych tensora odkształcenia
c, c_i	udział objętościowy i -ej fazy
c_i^+, c_i^-	części dodatnia i ujemna c_i
F, f	ogólny symbol funkcjonału, lub siły, obciążenia
$\kappa, \kappa_m^+, \kappa_m^-$	funkcje progowe przemiany fazowej
X, X_m	termodynamiczna siła napędowa przemiany fazowej
\mathcal{R}^n	zbiór n kopii liczb rzeczywistych
$W_i(\cdot)$	funkcja energii swobodnej Helmholtza i -ej fazy
$\widetilde{W}(\cdot)$	funkcja energii swobodnej Helmholtza mieszaniny faz
Δ	operator skończonego przyrostu
∇	operator gradientu
KPF	kryteria przemiany fazowej
LZK	liniowe zadanie komplementarności
MES	metoda elementów skończonych
MPF	martenzytyczna przemiana fazowa
MZPK	materiał z pamięcią kształtu
NW	nierówność wariacyjna

Rozdział 1

Wprowadzenie

Motywacja. Niniejsze opracowanie dotyczy termomechanicznego oraz matematycznego modelowania i numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych dla nowej klasy materiałów jaką stanowią *materiały z pamięcią kształtu* (MZPK)¹, oraz wykonanych z nich konstrukcji. Materiały te mają unikatowe właściwości, których zwykle metale lub ich stopy nie wykazują, tj. pseudosprężystość i efekt pamięci kształtu, czyli zdolność doznawania dużych pozornie trwałych odkształceń (rzędu 8%), które znikają po zdjęciu obciążenia, lub są w stanie wywierać znaczne siły przy podgrzaniu. Możliwość pełnienia przez te materiały funkcji sensorów i aktuatorów (czujników i siłowników), które są ich immanentną cechą, oraz ich zdolność dyssypacji energii znajdują stale rosnącą liczbę innowacyjnych, specjalistycznych zastosowań w różnorodnych dziedzinach inżynierii, obejmujących głównie przemysły lotniczy i samochodowy oraz medycynę [32, 149, 203, 31, 138, 97, 112]. Ostatnio częściej prowadzi się badania i stosuje MZPK również w konstrukcjach inżynierskich i budowlanych jako tłumiki drgań i regulatory sztywności konstrukcji [208, 200, 67, 183, 184]. Dzięki ich unikatowym właściwościom, materiały z pamięcią kształtu nazywane są *materiałami inteligentnymi* (ang. *smart materials*) a w szerszej perspektywie traktowane są jako dobry kandydat na materiał wielofunkcyjny [46, 182, 61, 179].

Niezwykle zachowanie się MZPK jest wynikiem termosprężystej odwracalnej martenzytycznej przemiany fazowej, której te materiały mogą ulegać pod wpływem działającego naprężenia, zmian temperatury lub pola elektromagnetycznego [137, 42, 19, 145]. Zjawisko pamięci kształtu związane z przemianą martenzytyczną odkryto na gruncie metalurgii w latach 30-tych XX wieku. Dopiero jednak w latach 60-tych XX wieku wraz z (przypadkowym) odkryciem niezwyklej właściwości stopu niklu i tytanu, o handlowej nazwie *nitinol*, na-

¹W j. angielskim używa się nazwy *shape memory alloys* (SMA)

stąpiło praktyczne zainteresowanie się tym zjawiskiem i jego możliwymi zastosowaniami; nazwa handlowa nitinol pochodzi od nazwy pierwiastków (NiTi) i Naval Ordnance Laboratory, tj. nazwy Laboratorium Badawczego Marynarki Wojennej Stanów Zjednoczonych. Przemiany martenzytyczne zachodzą nie tylko w stopach niklu i tytanu, ale także w stopach CuZnAl, CuAlNi, CuZn i innych.

Przemiany martenzytyczne są przemianami bezdyfuzyjnymi, pierwszego rzędu, zachodzącymi poprzez nukleację i wzrost nowej fazy, postępują wskutek procesu jednorodnego odkształcania się siatki krystalograficznej fazy pierwotnej nazywanej konwencjonalnie *austenitem*, bez zmiany jej składu chemicznego. Oznacza to, że faza będąca produktem tej przemiany, nazywana konwencjonalnie *martenzytem*, ma taki sam skład chemiczny i stopień uporządkowania (i zdefektowania) sieci jak matryca. Wyróżnia się dwa mechanizmy akomodacji (dostosowania): *poślizg*, który jest odkształceniem trwałym, typowym dla zjawiska plastycznego płynięcia i *bliźniakowanie*, który to mechanizm zapewnia odwracalność zmian kształtu. Tak więc, w przeciwieństwie do plastycznego płynięcia, charakterystycznym rysem termosprężystych przemian martenzytycznych jest ich krystalograficzna odwracalność, która jest wynikiem w istocie sprężytej akomodacji obszarów (domen) martenzytu.

Modele teoretyczne zjawisk fizycznych ujmowane są w postaci zagadnień (początkowo-) brzegowych. Aby dany model teoretyczny i generowany przez niego *problem brzegowy* był przydatny w zastosowaniach, problem musi być *dobrze postawiony*. Własność ta oznacza, że dla wszystkich dopuszczanych danych wejściowych istnieje i jest jednoznaczne jego rozwiązanie, które zależy w sposób ciągły od danych wejściowych. Dodajmy, że w przypadku zadań biurfkacyjnych, gdzie w pewnych punktach rozwiązanie ulega rozdwojeniu, oczekujemy także jego ciągłej zależności od danych (np. niezależności od siatki elementów skończonych poza zwykłym błędem aproksymacji). W tym kontekście warto też przywołać ważną zasadę wyrażoną przez Kleibera [77] (str. 11):

” a) aby uzyskać dostateczną efektywność analizy, należy już na etapie formułowania problemów brzegowo-początkowych myśleć o metodach ich rozwiązania”.

Cel i zakres opracowania. Martenzytyczne przemiany fazowe i towarzyszące im zjawiska to złożone procesy deformacyjne, które wymagają badań interdyscyplinarnych, m.in. na gruncie metalurgii, krystalografii, mechaniki i matematyki. Każda z tych dziedzin stawia sobie właściwe cele i skalę długości opisu zjawisk, stosując swój język i środki badawcze, co czyni ich wzajemną komunikację dość złożonym procesem. W literaturze proponuje się różne modele MZPK; krótkiego ich przeglądu dokonamy omawiając zjawisko martenzytycznej przemiany fazowej w dalszej części opracowania. Zgodnie z

tytułem opracowania naszym celem jest analiza konstrukcji z MZPK, dlatego ograniczamy się do opisu fenomenologicznego na gruncie mechaniki ośrodków ciągłych, kładąc nacisk także na implementację komputerową modelu teoretycznego i opracowanie autorskich programów komputerowych. Rozpatrujemy koherentne przemiany martenzytyczne, tzn. wektor przemieszczenia jest ciągły w całym cieple a jego gradient może być odcinkowo ciągły. Przedmiotem niniejszego opracowania są MZPK w zakresie ich pseudosprężystości, traktowanej jako mechaniczny rodzaj pamięci kształtu, w którym czynnikiem wzbudzającym martenzytyczną przemianę fazową jest naprężenie. Zastosowany model MZPK jest wynikiem pewnego uśrednienia (homogenizacji) i odzwierciedla charakterystyczne cechy tego procesu deformacyjnego z histerezą uwzględniając odkształcenia własne (fazowe) poszczególnych wariantów martenzytu. Wykorzystujemy koncepcję *zmiennych wewnętrznych*, które można interpretować jako udziały objętościowe poszczególnych wariantów martenzytu, a z matematycznego punktu widzenia, możemy mówić o regularyzacji wyjściowego niewypukłego problemu o wielu studniach energetycznych. Do aproksymacji przestrzennej zagadnień brzegowych stosujemy metodę elementów skończonych (MES). Opracowanie w pewnym sensie zachowuje charakter interdyscyplinarny obejmując z jednej strony obszar mechaniki ciał stałych i konstrukcji, a z drugiej matematyki stosowanej i komputerowej.

W tym opracowaniu zagadnienia początkowo-brzegowe dla rozpatrywanych deformacyjnych procesów z histerezą formułujemy w jednolitej postaci ewolucyjnej nierówności wariacyjnej, która obejmuje warunki równowagi statycznej i kryteria zachodzenia przemian fazowych. Przy przyjęciu odpowiednich hipotez, udowadniamy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla tych globalnych sformułowań. Najpierw rozpatrujemy proponowane związki konstytutywne dla 1D i 3D modeli MZPK, które następnie wykorzystujemy w analizie prętów, kratownic, tarcz, belek i płyt wykonanych z MZPK. Proponujemy dwa algorytmy numeryczne, które zaimplementowaliśmy w kilku autorskich programach komputerowych w języku Fortran 95: *Belka-SMA*, *Krata-SMA*, *Płyta-SMA*, *Pret-SMA*, *Tarcza-SMA*. Model teoretyczny MZPK, algorytmy i oparte na nich programy komputerowe okazały się efektywne w rozwiązywaniu złożonych, konkretnych zadań brzegowych. Otrzymane rezultaty symulacji numerycznych wg zaproponowanych modeli konstrukcji odzwierciedlają charakterystyczne cechy zachowania się MZPK i są zgodne z naszymi przewidywaniami.

W nauce, technice i ekonomii istnieje całe bogactwo problemów, które aby właściwie opisać należy użyć praw wyrażonych w postaci nie tylko równań lecz także nierówności (inkluzji). Podstawowym źródłem ograniczeń nierównościowych są ogólnie rozumiane prawa równowagi, zarówno fizycznej

jak i ekonomicznej natury. Zastosowane tutaj podejście, które wykorzystuje nierówności wariacyjne i warunki komplementarności, jest nie tylko naturalnym i matematycznie jednolitym ujęciem tego typu problemów, ale stanowi jednocześnie bardzo użyteczną podstawę do ich numerycznej analizy. W terminach matematycznych, problemy rozpatrywane w tym opracowaniu są ostatecznie formułowane w postaci słabej jako nierówność wariacyjna (NW) postaci:

Znaleźć takie rozwiązanie $u \in \mathcal{K}$, że

$$\langle P(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } v \in \mathcal{K} \quad (1.1)$$

Tutaj \mathcal{K} jest zbiorem ograniczeń nałożonych na poszukiwane rozwiązanie u ; zwykle $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ jest wypukłym podzbiorem liniowej unormowanej przestrzeni \mathcal{V} , na której operator $P : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ jest określony. Symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza sprzężenie dualne między przestrzenią \mathcal{V} i jej przestrzenią dualną \mathcal{V}^* , tzn. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R}$, przy czym \mathcal{R} jest zbiorem liczb rzeczywistych. W problemach rozpatrywanych w częściach III i IV tego opracowania, \mathcal{V} and \mathcal{K} są iloczynami kartezjańskimi pewnych zbiorów wynikających z charakteru zastosowanych zmiennych niezależnych w analizowanym procesie odkształceniowym. Dodać należy, że z uwagi na zjawisko histerezy i niemonotoniczny charakter procesu, np. wskutek niemonotonicznego obciążania, NW (1.1) rozwiązywana jest przyrostowo w oparciu o regułę monotonicznej ścieżki na każdym przyroście (kroku czasowym).

Procesy martenzytycznej przemiany fazowej, i towarzyszące jej w idealnej pseudosprężystości zjawisko płynięcia, wykazują fenomenologicznie duże podobieństwo do plastycznego płynięcia materiału. Jak już wspomniano wyżej, różne są jednak mechanizmy deformacyjne w mikroskali, w przypadku MZPK proces odkształcania następuje przez reorganizację siatki krystalograficznej z austenitu w martenzyt lub bliźniakowanie wariantów martenzytu, natomiast odkształcanie plastyczne tradycyjnych stopów metali jest wynikiem mechanizmu poślizgowego. Również z obliczeniowego punktu widzenia, oba te procesy można opisać za pomocą tzw. *warunków komplementarności*²

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \Phi \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (1.2)$$

gdzie $\Phi = \Phi(\dot{\lambda}, \cdot)$ jest pewną funkcją graniczną, zależną od zmiennej $\dot{\lambda}$ i jeszcze innych zmiennych. Zależności (1.2) noszą w plastyczności nazwę *warunków obciążania/odciążania*, natomiast w przypadku przemian fazowych mówimy o *kryteriach zachodzenia przemiany*. W przypadku rozpatrywanej tutaj przemiany fazowej z histerezyjnym zachowaniem, użyteczną okazała się

²Nazywanych też warunkami Karusha-Kuhna-Tuckera

II zasada termodynamiki, którą stosujemy w postaci nierówności Clausiusa-Duhema. Nierówność ta nakłada ograniczenia na związki konstytutywne i na ruch ośrodka. Ograniczenie na ruch dotyczy kierunku, w którym dany proces fizyczny może występować w naturze, w naszym przypadku chodzi o rozstrzygnięcie, który z wariantów martenzytu i w jakim kierunku może się rozwijać (przemiana wprost i przemiana odwrotna). Oprócz podobieństwa struktury formalnej warunków (1.2), zasadnicza różnica między plastycznym płynięciem a pseudosprężystym (martenzytycznym) płynięciem polega na tym, że w tym drugim przypadku na mnożnik Lagrange'a λ , nakłada się pewne *ograniczenia pudełkowe* (ang. *box constraints*), podczas gdy w plastyczności żąda się tylko jego nieujemności, $\lambda \geq 0$. Zauważmy jeszcze, że granica podobszaru konstrukcji, gdzie występuje plastyczne lub pseudosprężyste płynięcie nie jest znana a priori, lecz stanowi dodatkową niewiadomą zadania. Jest to tzw. *swobodny brzeg* (ang. *free boundary*), którego położenie otrzymujemy jako poboczny wynik rozwiązania zadania (1.2) lub odpowiadającej mu NW (1.1).

W opracowaniu wydzielono cztery części. Część I, PODSTAWY TEORII, zawiera podstawowe pojęcia mechaniki ciał odkształcalnych wykorzystywane w dalszych częściach opracowania. Po wprowadzeniu stosowanej notacji dla wielkości polowych mechaniki, przypominamy potrzebne dalej zasady termodynamiki i równanie pracy wirtualnej. Ponadto, dla wygody Czytelnika omawiamy tu wiele pojęć i koncepcji matematycznych związanych z nierównościami wariacyjnymi i zadaniami komplementarności. Pokazujemy jak powstają nierówności wariacyjne i jaki jest ich związek z zadaniami komplementarności. Podajemy wraz z dowodem podstawowe twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania nierówności wariacyjnych, bazujące na twierdzeniu Banacha o odzworowaniu zwężającym. Szkicujemy ogólne właściwości i zasady aproksymacji za pomocą MES. Przedstawiamy wykorzystane w obliczeniach algorytmy rozwiązywania zadań komplementarności.

W części II, KONSTRUKCJE SPRĘŻYSTE, omawiamy klasyczne teorie rozpatrywanych typów konstrukcji, przywołując odpowiadające im zagadnienia brzegowe i aproksymację ich rozwiązań MES na bazie sformułowania wariacyjnego. W jednowymiarowych (1D) przypadkach sprężytych prętów i belek pokazujemy, że chociaż z definicji MES jest metodą przybliżoną, błąd aproksymacji można uczynić praktycznie dowolnie małym i nieistotnym z punktu widzenia praktyki inżynierskiej.

Część III, MARTENZYTYCZNE PRZEMIANY FAZOWE, prezentuje proponowany model konstytutywny materiału z pamięcią kształtu. Zaczynamy od opisu zależności dla przypadku jednowymiarowego i tylko dwóch faz: austenitu i martenzytu, który następnie uogólniamy na przypadek trzech faz: austenitu i dwóch faz (wariantów) martenzytu, z myślą o ściskanych lub rozciąganych

prętach kratownicowych lub takowych włóknach zginanej belki. Potem rozpatrujemy ciało 3D, wyróżniając najpierw przypadek dwóch faz (austenitu i martenzytu), a kończymy na ogólnym przypadku wielu wariantów martenzytu, który opisuje funkcja energii o wielu lokalnych minimach (studniach energetycznych) odpowiadających odkształceniom własnym poszczególnych faz (wariantów). Tutaj też badamy przewidywania modelu i weryfikujemy programy komputerowe na przykładzie pręta i tarczy z MZPK.

Część IV, KONSTRUKCJE Z PAMIĘCIĄ KSZTAŁTU, wieńczy poprzednie części i zawiera propozycje modelu kratownic, belek i płyt z pamięcią kształtu. Rozpatrujemy przypadek ogólny włóknokompozytowych belek i płyt zbrojonych w wybranych warstwach włóknami z MZPK, stosując myślowy podział przekroju poprzecznego na warstwy; w przypadku szczególnym mamy belki i płyty o litym przekroju z MZPK. Załączone przykłady numeryczne stanowią swoistą weryfikację modelu teoretycznego i opracowanych programów komputerowych, oraz ilustrują specyfikę zachowanie się takich konstrukcji z MZPK.

Podstawowe założenia. Przedstawione w opracowaniu rozważania bazują na następujących głównych założeniach:

- Odkształcenia i przemieszczenia ciała są na tyle małe, że można je opisać wg teorii geometrycznie liniowej (wyjątek stanowią kratownice przestrzenne omawiane w podrozdziale 13.3).
- W stanie początkowym materiał jest jednorodny i izotropowy, jego zachowanie w zakresie sprężystym daje się opisać prawem Hooke'a.
- Rozpatruje się procesy quasi-statyczne.
- Rozważane procesy traktuje się jako izotermiczne (wyjątek stanowi 1D model analizowany w podrozdziale 9.4).
- Martenzytyczne przemiany fazowe są koherentne i zachodzą w zakresie pseudosprężystym.

Uwagi o oznaczeniach. Przyjęte w opracowaniu oznaczenia są próbą znalezienia kompromisu między systemami znakowania i tradycyjnych oznaczeń na niektóre wielkości stosowanymi w mechanice i matematyce. Ponadto autor starał się zachować spójność oznaczeń w opracowaniu i w autorskich programach komputerowych, aby uniknąć dodatkowych błędów na etapie ich pisania. Naczelną przyjętą zasadą jest znakowanie wielkości matematycznych kursywą: zwykłą – skalary, wytłuszoną – wektory (małe litery) i macierze (duże litery). Dalsze szczegóły podane są w miejscach definiowania zmiennych, funkcji oraz operatorów.